UNIVERSITA' CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Sede di Brescia

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Strutture Geometriche

Prof.ssa Silvia Pianta

Anno Accademico 2015/2016

Capitolo 1

Premessa sulle strutture geometriche

Oggetto di studio della Geometria sono le strutture geometriche, i loro gruppi di trasformazioni (isomorfismi e automorfismi) e le proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni di tali gruppi.
In questo primo capitolo diamo uno sguardo alle proprietà fondamentali di alcune classiche strutture geometriche. Come riferimenti bibliografici per una trattazione più approfondita di tali concetti suggeriamo ad esempio [16] e [18] per gli spazi topologici e metrici, [1], [2], [3], [4], [6], [7], [15], [19] per i piani affini, gli spazi vettoriali e proiettivi.

1.1 Definizione. *Siano $\mathcal{P}$ un insieme non vuoto, e $\mathscr{F}$ una famiglia non vuota di parti di $\mathcal{P}$, ossia $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$. Chiamiamo* spazio geometrico relativo a $\mathscr{F}$ *la coppia $(\mathcal{P}, \mathscr{F})$. Gli elementi di $\mathcal{P}$ vengono chiamati* punti*, mentre l'insieme $\mathcal{P}$ è detto* sostegno *dello spazio geometrico $(\mathcal{P}, \mathscr{F})$ e la famiglia $\mathscr{F}$ è detta* struttura geometrica su *$\mathcal{P}$.*

Gli elementi di $\mathscr{F}$ prendono nomi diversi a seconda del tipo di struttura considerata. Vediamo ora alcuni esempi di strutture geometriche particolarmente importanti.

1.1 Spazi topologici

Siano X un insieme con $X \neq \emptyset$ e $\tau \subseteq \mathfrak{P}(X)$ una famiglia di parti di X che soddisfi le seguenti proprietà:

(a) $X, \emptyset \in \tau$;

(b) per ogni famiglia $\mathscr{F} \subseteq \tau$ si ha che $\bigcup \mathscr{F} \in \tau$;

(c) per ogni famiglia finita $\mathscr{F} \subseteq \tau$ si ha che $\bigcap \mathscr{F} \in \tau$.

Diciamo allora che τ è una *struttura topologica* o *topologia* sull'insieme X, gli elementi di τ vengono detti *aperti* e la coppia (X, τ) si dice *spazio topologico*.

1.2 Spazi metrici

1.2 Definizione. *Sia X un insieme non vuoto. Diciamo che una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ è una* metrica *o* distanza *se, per ogni $x, y, z \in X$:*

(a) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \iff x = y$*;*

(b) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*.*

Chiamiamo spazio metrico *la coppia* (X, d)*.*

1.3 Definizione. *Siano (X, d) uno spazio metrico, $r \in]0, +\infty[$ e $x \in X$. Poniamo*

$$B(x, r) := \{\xi \in X : \ d(x, \xi) < r\}.$$

Chiamiamo $B(x, r)$ la palla aperta di centro x e raggio r*.*

1.4 Definizione. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora la famiglia $\mathscr{B} = \{B(x, r) : x \in X, \ r \in \mathbb{R}^+\}$ delle palle aperte in X definisce una* struttura metrica su X*.*

Si ricordi che a partire dalla famiglia $\mathscr{B}$ di tutte le palle aperte, si può definire una famiglia più ampia di parti di X, precisamente

$$\tau_d := \{A \subseteq X : \forall a \in A \ \exists r \in \mathbb{R}^+ \ con \ B(a,r) \subseteq A\} \subseteq \mathfrak{P}(X).$$

Chiamiamo τ_d *famiglia degli aperti di* (X,d). Risulta banalmente $\mathscr{B} \subseteq \tau_d$.

1.5 Osservazione. *Se* (X,d) *è uno spazio metrico e* τ_d *la famiglia degli aperti in* X *definita a partire dalla metrica, allora* τ_d *gode delle proprietà* (a), (b), (c) *che definiscono una topologia su* X*: essa verrà detta la* topologia indotta dalla metrica d *e in tal caso* (X,τ_d) *si dice* spazio topologico metrizzabile.

1.6 Osservazione. *E' interessante osservare che, dato uno spazio metrico* (X,d)*, se la famiglia* $\mathscr{B}$ *delle palle aperte soddisfa a certe opportune proprietà, è possibile ricostruire la metrica a partire da tale famiglia.*

Diamo qui solo un suggerimento per un possibile modo di risalire alla funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ a partire dalla struttura metrica $\mathscr{B}$.

1.7 Definizione. *Siano* (X,d) *uno spazio metrico e* τ_d *la famiglia degli aperti ad esso associata. Per ogni* $S \subseteq X$ *chiamiamo* frontiera di S *l'insieme*

$$\partial S := \{x \in X : x \in A \in \tau_d \implies A \cap S \neq \emptyset \neq A \cap (X \setminus S)\}.$$

Chiamiamo chiusura di S *l'insieme* $\overline{S} := S \cup \partial S$.

Per ogni $x, y \in X$ poniamo ora

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se e solo se } x = y \\ r > 0 & \text{se e solo se } y \in \partial B(x,r) \end{cases} .$$

Per assicurarci che questa definizione sia ben posta, ovvero che la $d : X \times X \to \mathbb{R}$ sia proprio una funzione, è necessario che le frontiere delle parte aperte dello spazio metrico caratterizzino esattamente i punti che hanno distanza assegnata dai centri delle palle; in altre parole, occorre poter dimostrare che:

$$\forall x, y \in X, \ x \neq y : \ d(x,y) = r > 0 \iff y \in \partial B(x,r).$$

A tale scopo occorre e basta richiedere che per la famiglia $\mathscr{B}$ dello spazio metrico (X, d) valga:

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y :\ \exists r \in \mathbb{R}^+ : y \in \partial B(x, r).$$

Si noti che questa condizione non è sempre verificata negli spazi metrici: per esempio, se si considera uno spazio metrico discreto si osserva subito che in esso la frontiera di qualunque palla aperta è vuota, mentre se il supporto ha cardinalità maggiore di 1 esistono coppie di punti distinti che hanno distanza 1.
Se però si assume che valga questa proprietà, da essa si possono poi dedurre tutte le proprietà della distanza d. In particolare, si può dimostrare che

$$\forall x, y \in X :\ y \in \partial B(x, r) \iff x \in \partial B(y, r),$$

che si traduce nella simmetria della funzione d. Si può inoltre dimostrare che

$$\forall x, y \in X :\ y \in \overline{B(x, r)} \implies (\forall s \in \mathbb{R}^+\ \ B(y, s) \subseteq B(x, r + s)),$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare.
Lasciamo queste dimostrazioni come esercizio.

1.3 Piani affini

1.8 Definizione. *Siano* $\mathbb{K}$ *un campo (o corpo),* $\mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$ *il piano affine associato allo spazio vettoriale (sinistro o destro)* $\mathbb{K}^2$*. Poniamo* $\mathcal{P} := \mathbb{K}^2$ *e*

$$\mathscr{R} := \{a + \langle x \rangle :\ a \in \mathbb{K}^2,\ x \in (\mathbb{K}^2)^*\}.$$

Chiamiamo $\mathscr{R}$ famiglia delle rette di $\mathbb{A}(\mathbb{K}^2)$*. Chiamiamo* piano affine coordinatizzato *(o* coordinatizzabile*)* su $\mathbb{K}$ *la coppia* $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ *e per la famiglia* $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ *valgono le seguenti proprietà:*

(A1) *dati comunque due punti distinti di* $\mathscr{P}$*, esiste una ed una sola retta di* $\mathscr{R}$ *tale che li contenga. In simboli:*

$$\forall x, y \in \mathscr{P},\ x \neq y,\ \exists!\ R \in \mathscr{R} :\ x, y \in R^1;$$

[1]Indichiamo con $\overline{x, y}$ la retta passante per i punti x e y.

(A2) *dati comunque un punto $p \in \mathcal{P}$ ed una retta $R \in \mathscr{R}$, esiste una ed una sola retta $S \in \mathscr{R}$ per p parallela*[2] *ad R. In simboli:*

$$\forall p \in \mathcal{P},\ \forall R \in \mathscr{R},\ \exists!\ S \in \mathscr{R}:\ p \in S \quad e \quad S \cap R = \emptyset \text{ oppure } S = R.$$

Indichiamo con $(p \parallel R)$ la retta per p parallela ad R. Se $R = a + \langle x \rangle$, allora risulta che $S = p + \langle x \rangle$;

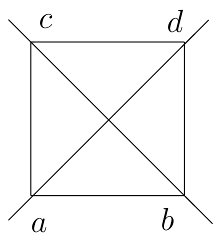
(A3) *ogni retta contiene almeno due punti, ed esistono tre punti distinti di $\mathcal{P}$ non allineati (cioè non appartenenti ad una stessa retta). In simboli:*

$$\forall R \in \mathscr{R} : |R| \geq 2, \quad e \quad |\mathscr{R}| \geq 2.$$

Generalizzando questo esempio si definisce *struttura di piano affine* su un insieme $\mathcal{P} \neq \emptyset$ qualsiasi una famiglia $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ soddisfacente alle condizioni $(A1), (A2), (A3)$, e la coppia $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ si chiama *piano affine*.

1.9 Esempio. *Vediamo il più semplice esempio di piano affine.*

$$\mathcal{P} := \{a, b, c, d\}, \quad \mathscr{R} := \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}.$$



1.10 Osservazione. *Considerando L'Esempio precedente, si ha che $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ è una rappresentazione del piano affine $\mathbb{A}(\mathbb{F}_2)$. Infatti basta porre, per esempio, $a = (0,0)$, $b = (0,1)$, $c = (1,0)$, $d = (1,1)$. Inoltre le rette sono tutti e soli i sottospazi affini 1-dimensionali. Ad esempio*

$$\{a, b\} = a + \langle b \rangle = (0,0) + \langle (0,1) \rangle.$$

Si noti che esistono delle condizioni geometriche che caratterizzano i piani affini (coordinatizzabili) su campi o su corpi non commutativi tra i piani affini più generali.

[2] Due rette di $\mathscr{R}$ si dicono parallele se coincidono oppure non hanno punti in comune.

1.11 Proposizione (di Pappo affine)**.** *Siano* $(\mathcal{P},\mathscr{R})$ *un piano affine geometrico,* $R \in \mathscr{R}$ *una retta tale che* $|R| \geq 3$ *e sia* $S \in \mathscr{R} \setminus \{R\}$*. Siano* $a_1, a_2, a_3 \in R$ *e* $b_1, b_2, b_3 \in S$ *due terne di punti distinti. Supponiamo che*

$$\overline{a_1, b_2} \parallel \overline{a_2, b_1} \quad e \quad \overline{a_1, b_3} \parallel \overline{a_3, b_1}.$$

Allora $\overline{a_2, b_3} \parallel \overline{a_3, b_2}$*.*

1.12 Osservazione. *Si noti che in un piano affine* $(\mathcal{P},\mathscr{R})$ *la cardinalità delle rette risulta essere costante. Infatti per ogni* $R, S \in \mathscr{R}$ *esiste una biiezione* $\varphi : R \to S$*. Verifichiamolo.*
Si condideri un punto $r \in R \setminus S$ *e un punto* $s \in S \setminus R$*. Allora poichè* $r \neq s$ *risulta ben definita la retta* $T := \overline{r, s}$*. Sia allora* $\varphi : R \to S$ *definita da* $\varphi(x) = S \cap (x \parallel T)$*. Tale applicazione è una biiezione tra* R *ed* S *poichè la retta* T *non è parallela nè ad* R *nè ad* S *per costruzione.*

Vale inoltre il seguente

1.13 Teorema. *Un piano affine* $(\mathcal{P},\mathscr{R})$ *è coordinatizzabile su un campo* $\mathbb{K}$ *se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni:*

(*a*) *per ogni* $R \in \mathscr{R}$ *risulta che* $|R| = 2$*, quindi* $(\mathcal{P},\mathscr{R}) = \mathbb{A}(\mathbb{F}_2)$*;*

(*b*) *esiste una retta* $R \in \mathscr{R}$ *tale che* $|R| > 2$*, (quindi per ogni* $R \in \mathscr{R}$ *si ha* $|R| > 2$*) ed inoltre è verificata la Proposizione di Pappo affine.*

1.4 Spazi vettoriali

1.14 Definizione. *Sia* $V = V(\mathbb{K})$ *uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$*. Poniamo* $\mathcal{P} := V$ *e* $\Sigma := \{W \in \mathfrak{P}(V) : W \leq V\}$*. La coppia* $(\mathcal{P}, \Sigma)$ *è uno spazio geometrico che possiamo ancora chiamare* spazio vettoriale*.*

Osserviamo che, se $V = V_n(\mathbb{K})$, o più semplicemente $V = \mathbb{K}^n$, la famiglia Σ gode delle proprietà seguenti deducibili dalle proprietà algebriche di $V_n(\mathbb{K})$, ma esprimibili senza utilizzare operazioni vettoriali.

($S1$) E' associato ad ogni sottospazio un numero intero k, con $0 \leq k \leq n$, detto *rango* del sottospazio e per ogni $k = 0, \dots, n$ esiste almeno un sottospazio di rango k. Indicando con S_k un sottospazio con $\mathrm{rg}(S_k) = k$, avremo che S_0 è unico ed è il sottospazio banale $\{0\}$, S_1 sono le rette vettoriali, ..., S_{n-1} sono gli iperpiani vettoriali ed infine S_n è unico e coincide con V stesso;

($S2$) se $S_h \leq S_k$, allora $h \leq k$ e risulta $h = k \iff S_h = S_k$;

($S3$) $S_i := S_h \cap S_k \in \Sigma$, inoltre

$$S_c := \bigcap \{W : \; S_h, S_k \leq W\} \in \Sigma.$$

Chiamiamo S_i *sottospazio intersezione* e S_c *sottospazio congiungente* di S_h e S_k. Si noti che risulta $S_c = S_h + S_k$;

($S4$) $h + k = i + c$ (formula di Grassmann).

Modificando di poco questo esempio, otteniamo il successivo.

1.5 Spazi proiettivi n-dimensionali

Sia $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$ e poniamo stavolta

$$\mathcal{P} := PG(V) := \{p = \langle \boldsymbol{v} \rangle : \; \boldsymbol{v} \in V^*\},$$

dove $\langle \boldsymbol{v} \rangle := \{k\boldsymbol{v} : k \in \mathbb{K}\}$, e poniamo

$$\Sigma := \{S = [W] : \; W \leq V\}, \quad \text{dove} \quad [W] := \{\langle \boldsymbol{w} \rangle : \; \boldsymbol{w} \in W^*\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{P}$ è l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di V, mentre Σ è l'insieme dei sottospazi proiettivi, i quali non sono altro che i sottospazi vettoriali, ma considerati come insiemi di sottospazi unidimensionali, anzichè loro unioni. Allora possiamo chiamare, per ogni sottospazio proiettivo W di V, *dimensione (proiettiva) di* W il numero $\mathrm{rg}(W) - 1$. Osserviamo che per $W = \{0\}$ si ha che $[W] = \emptyset$ e $\dim(\emptyset) = -1$. Dunque la proprietà ($S1$) dell' esempio precedente si formulerà in questo modo:

$(S1')$ ad ogni sottospazio proiettivo è associato un numero intero k $(-1 \leq k \leq n)$, detto *dimensione (proiettiva)* del sottospazio e per ogni $k = -1, \ldots, n$ esiste almeno un sottospazio $S_k = [W_{k+1}]$ di dimensione k. Avremo che $S_{-1} = \emptyset$ ed è unico, S_0 sono i sottospazi ridotti ad un solo punto, S_1 sono le *rette* proiettive ($[W]$ con $\mathrm{rg}(W) = 2$), ..., $S_n = \mathcal{P}$ ed è unico.

Le proprietà $(S2), (S3), (S4)$ valgono anche in questo caso, senza variazioni.
La coppia $(\mathcal{P} = PG(V), \Sigma)$ viene chiamata *spazio proiettivo n-dimensionale associato allo spazio vettoriale* $V = V_{n+1}(\mathbb{K})$ o *spazio proiettivo n-dimensionale coordinatizzato su* $\mathbb{K}$.

Generalizzando questo esempio, definiamo su un insieme qualsiasi $\mathcal{P} \neq \emptyset$ una *struttura proiettiva n-dimensionale* come una famiglia $\mathscr{S} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ soddisfacente alle condizioni $(S1'), (S2), (S3'), (S4)$, con

$(S3')$ $S_i := S_h \cap S_k \in \Sigma$, inoltre l'intersezione di una famiglia qualunque di sottospazi è un sottospazio.

$$S_c := \bigcap \{S : \ S_h, S_k \leq S\} \in \Sigma.$$

Chiamiamo S_i *sottospazio intersezione* e S_c *sottospazio congiungente* di S_h e S_k.

La coppia $(\mathcal{P}, \mathscr{S})$ viene detta *spazio proiettivo n-dimensionale.*

1.15 Osservazione. *Nella famiglia dei sottospazi di uno spazio proiettivo n-dimensionale, con $n \geq 1$, si può considerare in particolare la sottofamiglia $\mathscr{R}$ delle rette (sottospazi di dimensione 1), caratterizzata dalla proprietà:*

(S_1) *dati comunque due punti distinti di $\mathcal{P}$, esiste una ed una sola retta di $\mathscr{R}$ che li contenga.*

DIMOSTRAZIONE. Siano infatti $a, b \in \mathcal{P}$, con $a \neq b$ e sia $S_c(a, b)$ il loro sottospazio congiungente. Dalla formula di Grassmann risulta $0+0 = -1+1$, cioè $S_c(a, b)$ è una certa retta S_1. Se ora $S_1' \in \mathscr{R}$ è un'altra retta tale che $a, b \in S_1'$, risulta $S_1 \subseteq S_1'$, pertanto dall'assioma $(S2)$ per gli spazi proiettivi segue che $S_1 = S_1' =: \overline{a, b}$. ■

Nel caso $n = 2$ si parla di *spazio proiettivo bidimensionale*, i cui sottospazi si riducono a quello banale $(\emptyset)$, i singleton dei punti S_0, le rette S_1 e il sottospazio improprio (S_2, ossia lo spazio stesso). Poichè allora gli unici sottospazi significativi sono le rette, possiamo considerare come struttura proiettiva sull'insieme $\mathcal{P}$ dei punti l'insieme

$$\mathscr{R} := \{S_1 : \ S_1 \in \mathscr{S}\}$$

delle rette ed indicare il piano proiettivo con la coppia $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$.
La famiglia $\mathscr{R}$ gode delle seguenti proprietà:

$(P1)$ dati comunque due punti distinti di $\mathcal{P}$, esiste una ed una sola retta di $\mathscr{R}$ che li contenga;

$(P2)$ date comunque due rette distinte di $\mathscr{R}$, esiste uno ed un solo punto di $\mathcal{P}$ che appartiene ad entrambe;

$(P3)$ $|\mathscr{R}| \geq 2$.

Aggiungiamo alle tre precedenti una ulteriore condizione:

$(P4)$ $\forall R \in \mathscr{R} : |R| \geq 3$.

Si può facilmente verificare che le proprietà $(P3)$ e $(P4)$ insieme possono essere sostituite dalla richiesta che in $\mathcal{P}$ esistano quattro punti distinti, a tre a tre non allineati.

1.16 Definizione. *Chiamiamo* piano proiettivo *uno spazio geometrico* $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ *che soddisfi* $(P1)$*,* $(P2)$*,* $(P3)$ *e* $(P4)$*.*

1.17 Osservazione. *Come per i piani affini, anche per i piani proiettivi e, più in generale, per gli spazi proiettivi n-dimensionali ci si pone la questione sotto quali ipotesi essi siano* coordinatizzabili su un campo*, o almeno* su un corpo *(non necessariamente commutativo). Possiamo richiamare i seguenti risultati:*

(a) *uno spazio proiettivo di dimensione almeno 2 è coordinatizzabile su un corpo (non necessariamente commutativo) se e solo se è verificata in esso la* proposizione di Desargues*: utilizzando configurazioni di Desargues si può costruire il corpo delle coordinate; viceversa, se lo spazio è ottenuto da uno spazio vettoriale su un corpo, la proposizione di Desargues diviene un teorema(cfr. e.g. [7]);*

(b) *In dimensione* $n \geq 3$ *la proposizione di Desargues è automaticamente verificata (si dimostra a partire dagli assiomi di spazio proiettivo), mentre in dimensione* 2 *non c'è modo di dimostrarla a partire dai soli assiomi di piano proiettivo, dunque:*

(c) *ogni spazio proiettivo di dimensione maggiore o uguale a* 3 *è coordinatizzabile su un corpo, mentre esistono* piani proiettivi non desarguesiani*;*

(d) *uno spazio proiettivo di dimensione* $n \geq 2$ *è coordinatizzabile su un campo se e solo se in almeno un piano è verificata la* proposizione di Pappo proiettiva *(cfr. [7]).*

(e) *la proposizione di Pappo proiettiva implica la proposizione di Desargues;*

(f) *nel caso finito, ogni corpo è un campo, quindi le proposizioni di Desargues e di Pappo proiettiva risultano equivalenti.*

1.6 Spazi lineari e semilineari

Generalizzando gli esempi costituiti dai piani affini e proiettivi (in senso astratto), possiamo considerare un insieme $\mathcal{P} \neq \emptyset$ di punti e $\mathscr{R} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ tale che

($L1$) per due punti distinti passa una ed una sola retta di $\mathscr{R}$;

($L2$) ogni retta contiene almeno due punti.

Otteniamo allora che $\mathscr{R}$ è una struttura di rette o *struttura lineare* su $\mathcal{P}$, e la coppia $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ è detta *spazio lineare*.

Generalizzando ulteriormente, possiamo chiedere ad $\mathscr{R}$ di soddisfare ad una proprietà più debole di ($L1$), oltre che ad ($L2$):

$(SL1)$ per due punti passa al più una retta di $\mathscr{R}$;

$(SL2)$ ogni retta contiene almeno due punti.

Allora $(\mathcal{P}, \mathscr{R})$ si chiama *spazio semilineare*. Tra gli spazi lineari vi sono gli spazi affini e proiettivi di dimensione qualsiasi , purchè si selezioni come famiglia di parti di $\mathcal{P}$ la sola famiglia delle rette, ma anche svariati esempi non proiettivi , nè affini. Tra gli spazi semilineari vi sono tutti gli spazi lineari, i grafi, gli spazi polari, i quadrangoli e i poligoni generalizzati, le geometrie parziali e semiparziali ([4]).

Bibliografia

[1] M. ABATE, *Geometria*, McGraw-Hill, Milano, 1996;

[2] E. ARTIN, *Algebra geometrica*, Feltrinelli, Milano, 1971;

[3] R. BAER, *Linear algebra and projective geometry*, Academic Press, New York, 1952;

[4] L.M. BATTEN, *Combinatorics of finite geometries*, Cambridgr University Press, Cambridge, 1997;

[5] E.D. BLOCH *A first course in geometric topology and differential geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997;

[6] P.J. CAMERON, *Projective and polar spaces*, QMW Maths Notes 13 (second edition), University of London, London, 2000;

[7] G. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Soc. Ed. Dante Alighieri, Milano, 1969;

[8] H.S.M. COXETER, *Non-euclidean geometry*, Toronto University Press, Toronto, 1968;

[9] H.D. EBBINGHAUS, K. LAMOTKE, J.H. ERWING, *Numbers. With an introduction*, Springer Verlag, New York, 1990;

[10] F. KLEIN, *Il programma di Erlangen. (Introduzione di E. Agazzi, traduzione a cura di A. Bernardo)*, La Scuola editrice, Brescia, 1998;

[11] T.Y. LAM, *The algebraic theory of quadratic forms*, W.A.Benjamin, Reading, 1973;

[12] R.C. Lyndon, *Groups and geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987;

[13] O.T. O'Meara *Introduction to quadratic forms*, Springer Verlag, Berlin, 1973;

[14] R. Ramsay, R. Richtmyer, *Introduction to hyperbolic geometry*, Springer Verlag, Berlin, New York, 1995;

[15] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1989;

[16] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, 1991;

[17] J. Stillwell *Geometry of surfaces*, Springer Verlag, Berlin, New York,1992;

[18] G. Tallini, *Strutture geometriche*, Liguori editore, Napoli,1991;

[19] D.E. Taylor, *The geometry of the classical groups*, Sigma Series in Pure Maths, Heldermann Verlag, Berlin, 1992;